



W
28
(8602)

Documento de Trabajo

8 6 0 2

MICROELECTRONICA Y ECONOMETRIA

UNA APLICACION DIDACTICA AL MODELO LINEAL SIMPLE

José Hernández Alonso

La Econometría es una rama científica evidentemente empírica, en la cual, toda aplicación que se pretenda realizar, supone la ejecución de cálculos largos y tediosos, siendo necesario el concurso de métodos y técnicas que faciliten de una manera rápida y, sobre todo, precisa su realización.

Afortunadamente, nuestro siglo nos ha dado una moderna técnica de cálculo, representada por los ordenadores electrónicos, que facilita la resolución de cualquier problema econométrico con un nivel aceptable de generalidad y eficacia.

Aunque el término ordenador parece sinónimo de máquina de grandes dimensiones, costosa y de difícil manejo, para uso exclusivo de personal altamente especializado, el desarrollo de la industria electrónica, en apenas 40 años desde su nacimiento, ha conocido una evolución (o revolución, según muchos autores) tan espectacular que está cambiando esta idea a pasos acelerados.

Innovaciones tecnológicas consideradas prodigiosas, como el transistor y su integración en pequeñas plaquitas o "chips", base de la microelectrónica, han generado un proceso constante de miniaturización y abaratamiento de componentes que permite hoy día que pequeños ordenadores, denominados microordenadores, ordenadores personales (O.P.) o simplemente "micros", dispongan de potencias de cálculo propias de los grandes ordenadores de la década de los años 60, pero en una máquina de reducidas dimensiones, bajo precio y con un lenguaje conversacional (Basic) fácil y flexible.

Estas características del micro, sobre todo su bajo precio y facilidad de programación que permite su adquisición y manejo por cualquier persona, no experto informático, lo hacen especialmente interesante como técnica de cálculo válida en aplicaciones econométricas elementales, que deben facilitar, sin ninguna duda, la mejor comprensión de la Econometría por parte de nuestros alumnos de las Facultades de Económicas.

En este sentido, se va a desarrollar aquí una aplicación sencilla que concluya en la resolución de los cálculos genéricos de los denominados económicamente modelos lineales simples (M.L.S.).

El proceso de resolución que se adopta es el típico de quién se enfrenta por primera vez con la tarea de resolver un problema con un ordenador, a saber:

1º Fase de definición:

Análisis del problema teórico y su resolución a nivel conceptual.

2º Fase de diseño:

Estructuración de las tareas a ejecutar y diagrama de flujo que simplifique su comprensión.

3º Fase de programación:

Escritura del programa y depuración de errores de sintaxis.

4º Fase de prueba y aceptación:

"Correr" el programa y depurarlo de errores de cálculo - (errores de algoritmo) haciendo funcionar el programa con un problema de resultados conocidos.

La programación se efectuará siguiendo una técnica elemental, acorde con los conocimientos que los alumnos adquieren en un curso de introducción al Basic o los que ellos mismos puedan adquirir en un manual de dicho lenguaje. Aún así, se explicitarán un conjunto de sentencias de manejo de impresora, de más difícil comprensión y manejo, pero que se incluyen por ser imprescindibles para la presentación escrita de los resultados.

El programa se desarrolla en lenguaje Basic Applesoft, usado en el micro Apple II, si bien por la técnica elemental de programación que se sigue, puede ser sencillamente adaptado a otros dialectos del Basic manejados por micros más populares.

Aunque su atención se centra en un tema econométrico, resulta igualmente válido para la resolución de los cálculos que la Estadística plantea en cualquier distribución bidimensional.

1) MODELO LINEAL SIMPLE. ESQUEMA TEORICO (1)

La relación económica más sencilla es aquella que puede establecerse entre dos variables X e Y mediante una ecuación lineal como/ la siguiente:

$$Y = \alpha + \beta X + u$$

en la que Y se denomina variable endógena (variable dependiente matemáticamente), X es la variable exógena (explicativa o independiente) y U es la perturbación aleatoria, mientras que α y β son dos parámetros desconocidos.

El propósito de la Econometría es estimar los parámetros estructurales α y β , para lo que debe disponerse de una serie de observaciones estadísticas de las variables X e Y .

Estas observaciones pueden efectuarse a lo largo del tiempo / -datos de series temporales- o bien para diferentes individuos, grupos, objetos ... en un momento dado -datos de corte transversal o cross section-. La perturbación aleatoria, por definición, es una variable no observable.

Designando las observaciones por

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

se plantea un sistema de n ecuaciones, una por cada par de valores, que permite estimar estadísticamente las incógnitas del mismo, los parámetros de la relación propuesta.

(1) Este esquema teórico es simplemente una referencia básica al modelo lineal simple. Para sacarle todo su partido es necesario complementarlo con la lectura del correspondiente capítulo de cualquiera de los manuales econométricos cuya bibliografía se relaciona al final del trabajo.

En Econometría, la relación lineal entre dos variables, recibe el nombre de modelo lineal simple y se escribe formalmente por la ecuación

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

en donde

y_i son variables aleatorias independientes

x_i variables matemáticas exactas

α, β parámetros desconocidos

u_i variables aleatorias no observables o independientes/
con distribución normal de medio cero y varianza σ^2

ESTIMACION DE LOS PARAMETROS.- Estimar los parámetros del modelo - significa obtener valores numéricos que sustituyan a los símbolos α y β . Conocidos estos elementos, que se suponen constantes, se conoce todo lo que es sistemático en el modelo. Ahora bien, en la práctica no es posible llegar a un conocimiento exacto del valor de tales parámetros. Según los supuestos establecidos, solamente se dispone de una información parcial sobre el fenómeno en estudio (la contenida en la muestra) y, a partir de esos datos incompletos y, con base en la teoría estadística de la estimación, se pretende inferir los valores de los parámetros desconocidos.

La estimación (puntual) necesita, entonces, de la elección de un método de estimación, que permita obtener unas funciones de los valores muestrales denominados estadísticos o estimadores, a los que deben exigirse un cierto comportamiento expresado en términos de propiedades estadísticas que aseguren la fiabilidad del proceso de inferencia. En el modelo lineal simple, por las propiedades "óptimas", a las que se llegan (estimadores lineales, insesgados, óptimos, suficientes y consistentes) acudimos al método de los mínimos cuadrados, o dicho en otras palabras, a minimizar la suma de los cuadrados de los residuos de la regresión lineal de Y sobre X.

Designando por \hat{u}_i estos residuos, por $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ los estimadores/ de los parámetros y por \hat{y}_i los valores de y_i a través de la ecuación estimada, podemos expresar matemáticamente el método como

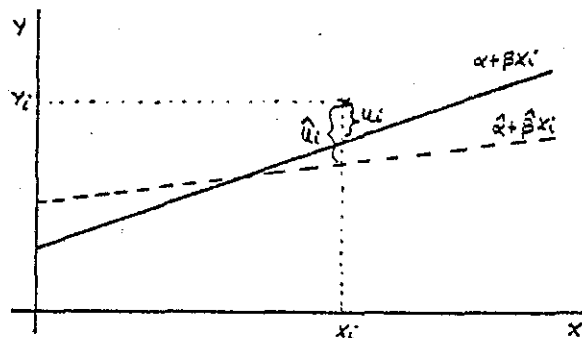
$$\text{minimizar } \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$$

en donde

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$$

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$$

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i$$



aplicando las condiciones de minimización, se deduce el sistema de ecuaciones normales

$$\sum_{i=1}^n y_i = n \hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

cuya resolución permite obtener:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}$$

Los valores numéricos resultantes de aplicar estas expresiones a los datos de una muestra determinada reciben el nombre de estimaciones. Si se emplean muestras diferentes, se obtendrán valores probablemente distintos. Para dar una idea de las oscilaciones que pueden producirse de una muestra a otra, se estiman también las varianzas (o las desviaciones típicas) de los estimadores.

$$\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

En las mismas interviene el estimador de la varianza de las perturbaciones ($\hat{\sigma}^2$) cuya propia estimación se basa en la varianza de los residuos mínimo cuadráticos ($S_{\hat{u}_i}^2$) si bien, para garantizar su insesgadez se la corrige con los grados de libertad perdidos en la previa estimación de los parámetros α y β . Matemáticamente:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-2} S_{\hat{u}_i}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{n-2}$$

La exactitud de las estimaciones puntuales que pueden medirse, como hemos dicho, por la magnitud de las correspondientes varianzas -

de a las estimaciones por intervalos que, en base a la distribución de los estimadores, nos marcan, para un nivel de significación, (ϵ), los límites confidenciales en que se encuentran con una probabilidad $1-\epsilon$ los valores desconocidos de los parámetros. En concreto, nos basamos en la distribución "t" de Student con $n-2$ grados de libertad que permite obtener, en cada caso, un valor numérico, genéricamente designado por $t_{n-2}(\epsilon/2)$ que define los intervalos.

$$I_{\alpha}: \hat{\alpha} \pm t_{n-2}(\epsilon/2) \hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}$$

$$I_{\beta}: \hat{\beta} \pm t_{n-2}(\epsilon/2) \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$$

Dado que todos los valores del intervalo son compatibles como estimación del parámetro desconocido y hemos resumido éstos por la estimación puntual, en el caso más desfavorable, puntos extremos, se comete un error relativo, que viene medido por la razón existente entre la diferencia del punto extremo al punto medio (estimación puntual) y el propio punto medio. En otros términos, la mitad de la amplitud del intervalo partido por el valor de la estimación puntual o $t_{n-2}(\epsilon/2)$ por desviación típica en relación a la estimación puntual.

Esta última forma de definirlo, recuerda una medida típica de la Estadística Descriptiva, el coeficiente de variación de Pearson. Por similitud con el mismo, vamos a denominar a nuestra medida coeficiente de dispersión

$$Cd_{\alpha} = \frac{t_{n-2}(\epsilon/2) \hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}}{|\hat{\alpha}|} \times 100$$

$$Cd_{\beta} = \frac{t_{n-2}(\epsilon/2) \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}}{|\hat{\beta}|} \times 100$$

considerándosele en tantos por ciento y con el denominador en valor absoluto, como forma de expresar más adecuadamente el sentido de la dispersión que tratamos de medir. Es una magnitud sin dimensiones, independiente de las unidades que se manejen en los datos de la muestra. / En principio, parece aconsejable que, en cualquier aplicación, su magnitud no supere una cota máxima del 20 ó 25 %, si bien, cada investigador debe fijar el error admisible en función de la finalidad y precisión que se marque a su trabajo.

CONTRASTES DE HIPOTESIS SOBRE LOS PARAMETROS.- Es normal en Econometría y a requerimiento de la Teoría Económica, contrastar si determinadas hipótesis, sobre el comportamiento de los parámetros, son compatibles con los resultados obtenidos a un nivel de significación prefijado.

Para analizar si un valor particular de α (α_0) o de β (β_0) puede ser generado por las observaciones en estudio, se acude a la realización de un contraste de los estadísticamente denominados de significación, es decir: se trata de aceptar una hipótesis nula ($H_0: \alpha = \alpha_0$ o $H_0: \beta = \beta_0$) cuyo rechazo no implica la aceptación de ninguna alternativa.

El contraste puede ejecutarse por distintos caminos, uno de ellos, por los propios intervalos de confianza. La regla de decisión en este caso, se basa en el hecho de que el valor correspondiente de la hipótesis pertenezca o no al intervalo del parámetro

$$\begin{array}{lll} \text{Si} & \alpha_0 \in I_\alpha & \text{Acepta } H_0: \alpha = \alpha_0 \\ \text{Si} & \beta_0 \in I_\beta & \text{" } H_0: \beta = \beta_0 \end{array}$$

particularmente, siempre debe contrastarse el valor concreto $\beta=0$, dado que su aceptación o rechazo implica rechazar o aceptar correlativamente la existencia de relación de dependencia lineal entre las variables, en otras palabras, aceptar o rechazar el modelo en su conjunto.

PREDICCIÓN, VALOR MEDIO Y VALOR INDIVIDUAL.- Las estimaciones obtenidas pueden tener interés por sí mismas. Son muchas las investigaciones económicas en donde basta conocer el valor de los dos parámetros estructurales. En tal caso, las estimaciones y contrastes realizados hasta ahora, serían suficientes para nuestros propósitos. Sin embargo, es posible que nos interese utilizar la función estimada para efectuar predicciones sobre el valor que en el futuro tomará la variable Y en consonancia con valores prefijados de la variable X.

En general, nuestras predicciones se expresaran de la siguiente forma: "si no se altera la estructura del fenómeno y si el valor que adopta X es X_0 , se puede predecir que el valor de Y será" En otras/

palabras, que la validez de cualquier predicción viene condicionada a que en el período correspondiente se mantenga la validez del modelo o, lo que es lo mismo, que no se alteren los valores de los parámetros debido a variaciones estructurales del sistema económico y, por otra parte, que se cumplan escrupulosamente los valores prefijados de la variable explicativa.

Veamos a continuación que tipos de predicciones pueden efectuarse.

- 1) Predicciones del valor medio: $\alpha + \beta X_0$.- Normalmente interesa predecir la parte de la variable Y que sistemáticamente depende de X, prescindiendo de la perturbación aleatoria. En tal caso, la predicción a utilizar sería

$$\hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_0$$

como $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ ya se han calculado, bastará introducir el valor X_0 para obtener el correspondiente valor numérico de la predicción.

Por las mismas razones expuestas al estimar los parámetros α y β puede ahora hablarse de estimación de la varianza del predictor, predicción por intervalos y coeficiente de dispersión de la predicción media. Sus expresiones matemáticas:

$$\hat{\sigma}_{\hat{Y}_0}^2 = \hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right)$$

$$I_{\alpha+\beta X_0} = \hat{Y}_0 \pm t_{n-2}(1/2) \hat{\sigma}_{\hat{Y}_0}$$

$$C_d(\alpha+\beta X_0) = \frac{t_{n-2}(1/2) \hat{\sigma}_{\hat{Y}_0}}{|\hat{Y}_0|}$$

- 2) Predicción del valor individual: $Y_0 = \alpha + \beta X_0 + u_0$.-

Si lo que interesa es obtener una predicción del valor/particular que adopta Y (Y_0), incluyendo en él la perturbación aleatoria, se demuestra que la mejor fórmula/a emplear es la misma que en el caso anterior

$$\hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_0$$

Sin embargo, esta estimación ahora está sujeta a la posibilidad de mayores errores, como consecuencia de incluir la componente aleatoria del modelo en la magnitud a estimar.

Las nuevas medidas de dispersión se constituyen sobre la base del error cuadrático medio, que resulta ser igual a la varianza de la variable aleatoria, - diferencia entre Y_0 e \hat{Y}_0 o, lo que es lo mismo, - añadiendo a la estimación de la varianza del valor/medio, la correspondiente a la perturbación aleatoria ($\hat{\sigma}_{Y_0-\hat{Y}_0}^2 = \hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_{\hat{Y}_0}^2$). Las expresiones concretas se obtienen sobre las del valor medio cambiando $\hat{\sigma}_{\hat{Y}_0}^2$ por $\hat{\sigma}_{Y_0-\hat{Y}_0}^2$.

MODELOS NO LINEALES. LINEALIZACIÓN. Junto a la relación lineal entre variables, la Teoría Económica puede sugerir una representación mediante una forma funcional no lineal. En tales casos, caben dos probabilidades de actuación: intentar modelizar una relación no lineal, o bien, buscar una transformación inicial de los datos, de tal manera que la relación entre los datos transformados aparezca/ como lineal.

En Econometría, sabemos preferir esta segunda vía de actuación (linealización) que permite aplicar de una forma sencilla - todos los conocimientos del modelo lineal a otros que no lo son.

Especialmente interesante es la transformación logarítmica que puede afectar, bien a la variable endógena (función semi-logarítmica), o bien, a las dos variables simultáneamente (función doble-logarítmica). En el primer caso se modeliza la relación $Y_i = \alpha \cdot \beta^{X_i} \cdot u_i$ y en el segundo $Y_i = \alpha \cdot X_i^\beta \cdot u_i$. En ambos casos, los coeficientes expresivos de la pendiente de la ecuación linealizada adquieren un sentido económico preciso. Así, la característica fundamental de la función doble-logarítmica consiste en/ que el coeficiente mide una elasticidad, permaneciendo esta constante (modelo de elasticidad constante), mientras que en la función semi-logarítmica representa tasa de incremento de la variable endógena en relación a cambios absolutos en la exógena.

11) TAREAS A EJECUTAR Y DIAGRAMA DE FLUJO

Tal y cómo se ha expresado en el punto anterior, existen una serie de cálculos a ejecutar dentro del proceso de estimación, contrastación y predicción en un modelo lineal simple, que conviene ahora sintetizar y homogenizar para que la tarea de programación sea lo más sencilla posible.

En este sentido, resumimos en el cuadro I las medidas a obtener y las fórmulas para su cálculo, en un esquema que pretende ser lógico y práctico para ejecutar dicha tarea y, a su vez, una forma clara y sencilla de comprensión, del proceso econométrico y de presentación de resultados.

El cuadro se encuentra dividido en tres columnas y dos - filas que contienen la siguiente información: por columnas modelo/ descriptivo estimado (1), estimadores mínimo-cuadráticos de los parámetros estructurales (2) y predicción (3), subdividida, a su vez, en otras dos columnas, según se trate de predicción del valor medio o del valor individual. En las filas, la A recoge las medidas de dispersión absoluta respecto de los elementos contenidos en cada columna, y la B las correspondientes medidas de dispersión relativa. Con relación a las primeras, utilizamos las varianzas y, para las segundas, el coeficiente de determinación (R^2) y los coeficientes de dispersión (Cd) medidos por la mitad del intervalo en relación al valor absoluto del estimador correspondiente en tantos por cientos.

La primera columna del cuadro nos permite, en cada caso, conocer cómo la recta de regresión resume o sintetiza la nube de puntos representativa de los datos de la muestra. Este tipo de análisis es típico de la teoría de la regresión lineal simple de la Estadística Descriptiva y de ella lo toma la Econometría como punto inicial del estudio del modelo lineal simple. Los cálculos puramente econométricos, se puede decir que comienzan en la columna segunda con la estimación de la varianza de las perturbaciones, las varianzas de los estimadores mínimo-cuadráticos y los coeficientes de dispersión, junto a los intervalos de confianza en que se basan.

Cuadro 1.- Resumen de cálculos y resultados básicos en un modelo lineal simple.

	1	2	3
	Modelo Descriptivo	Estructura estimada	Predicción
	$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$	$\hat{\beta} = s_{yx}/s_x^2; \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X}$	$\hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_0$
(A)	$S_{\hat{u}_i}^2 = S_Y^2 (1 - R^2)$	$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-2} S_{\hat{u}_i}^2$ $\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}^2 = \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 \cdot \sum x_i^2 / n$ $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 = \hat{\sigma}^2 / n s_x^2$	$\hat{\sigma}_{\hat{Y}_0}^2 = \hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right]$ $\hat{\sigma}_{Y_0 - \hat{Y}_0}^2 = \hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_{\hat{Y}_0}^2$
(B)	$R^2 = s_{yx}^2 / s_Y^2 \cdot s_x^2$	$I_{\alpha}: \hat{\alpha} \pm t_{n-2} (\epsilon/2) \hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}$ $I_{\beta}: \hat{\beta} \pm t_{n-2} (\epsilon/2) \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$ $Cd_{\beta} = \frac{I_{\beta}}{2 \hat{\beta} } ; Cd_{\alpha} = \frac{I_{\alpha}}{2 \hat{\alpha} }$	$I_{\alpha+\beta X_0}: \hat{Y}_0 \pm t_{n-2} (\epsilon/2) \hat{\sigma}_{\hat{Y}_0}$ $I_{Y_0}: \hat{Y}_0 \pm t_{n-2} (\epsilon/2) \hat{\sigma}_{Y_0 - \hat{Y}_0}$ $Cd_{\alpha+\beta X_0} = \frac{I_{\alpha+\beta X_0}}{2 \hat{Y}_0 }$ $Cd_{Y_0} = \frac{I_{Y_0}}{2 \hat{Y}_0 }$

En la misma se acumula suficiente información como para concluir una evolución positiva o negativa del proceso de modelización. En efecto, los intervalos de confianza compatibilizan, como valores de hipótesis sobre α y β a todos los puntos en ellos contenidos. En particular, el valor cero para β nos permitirá aceptar o rechazar la relación de dependencia lineal entre las variables. Los coeficientes de dispersión, a su vez, nos expresarán si esa relación se ha cuantificado adecuadamente, si los valores obtenidos como estimadores de α y β son una aproximación aceptable a los valores desconocidos de los parámetros estructurales.

La última columna, optativa en muchos casos, evalúa la capacidad predictiva del modelo. En base a los coeficientes de dispersión propios, podemos analizar la validez predictiva en tanto en cuanto la precisión de la previsión puntual se considere adecuada para los fines prácticos que el modelo persigue.

Operativamente, el conjunto de medidas y coeficientes contenidos en el cuadro, se han procurado definir matemáticamente a través de las que las preceden, en una función de encadenamiento, con la finalidad de aprovechar al máximo posible toda la información, y reducir coherentemente el número de cálculos a ejecutar y, por tanto, a programar. En este sentido, el conjunto de operaciones a efectuar, se completa con unos cálculos previos tendentes a obtener los momentos (medias, varianzas y covarianzas) de la distribución estadística bidimensional, representada por los datos de la muestra, que tan profusamente son utilizados en la definición de los elementos básicos del modelo.

En el cuadro II se formalizan, desde un punto de vista didáctico, el conjunto de momentos y el proceso esquemático de su obtención. Obviamos en este caso su comentario por tratarse de conceptos elementales de Estadística Descriptiva, que deben ser ampliamente conocidos por nuestros alumnos.

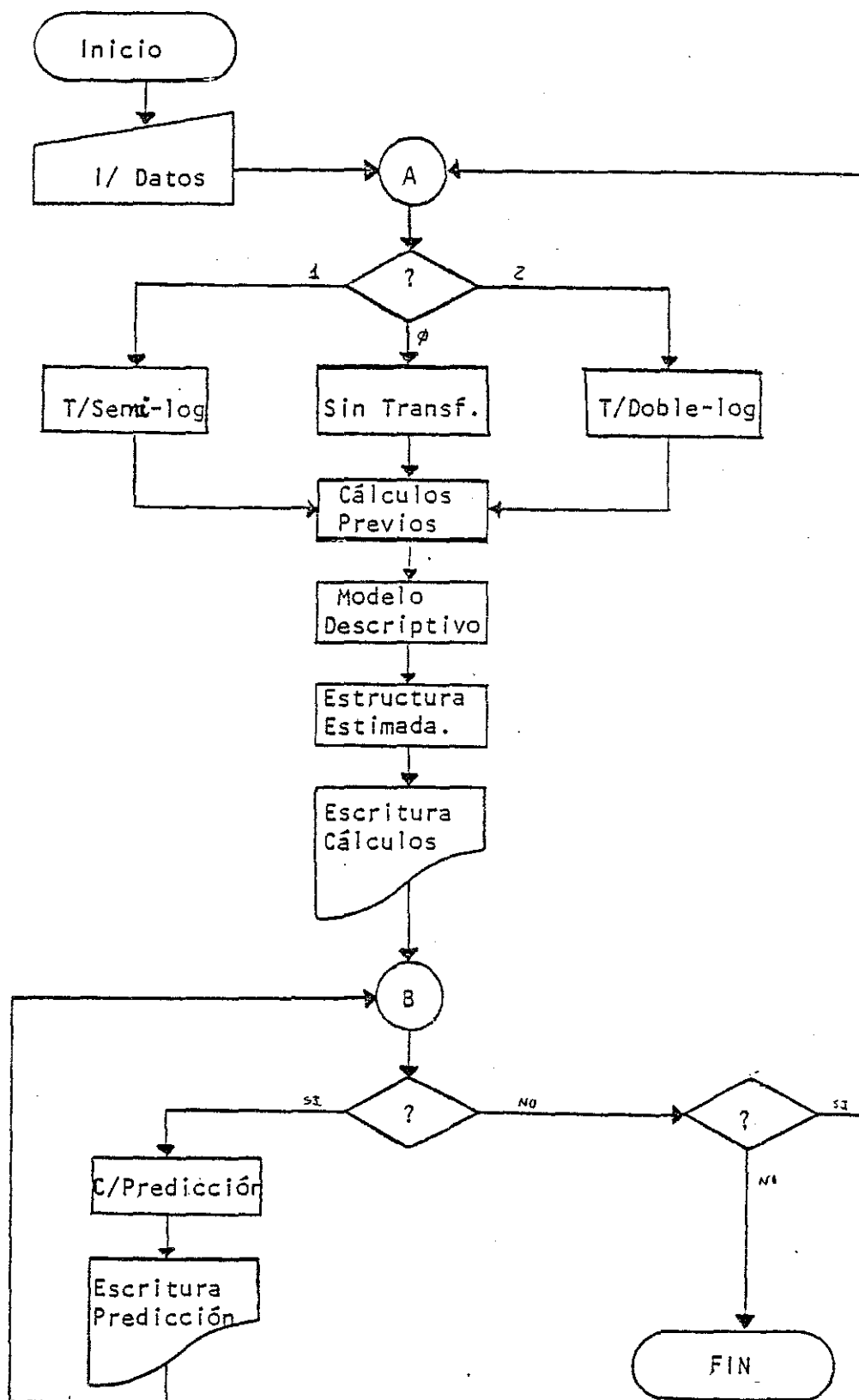
Cuadro 11.- Cálculos previos: Momentos de la distribución bidimensional.		
Sumatorios	Momentos	
$\sum_{i=1}^n Y_i$	$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$	\bar{Y}^2
$\sum_{i=1}^n X_i$	$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$	\bar{X}^2
		$\bar{Y}\bar{X}$
$\sum_{i=1}^n Y_i^2$	$a_{02} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2}{n}$	$S_Y^2 = a_{02} - \bar{Y}^2$
$\sum_{i=1}^n X_i^2$	$a_{20} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}$	$S_X^2 = a_{20} - \bar{X}^2$
$\sum_{i=1}^n Y_i X_i$	$a_{11} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i X_i}{n}$	$S_{YX} = a_{11} - \bar{Y}\bar{X}$

En resumen, las tareas a ejecutar, en cuanto a cálculos se refiere, podemos agruparlas en las cuatro siguientes:

- 1° Cálculos previos: sumas y momentos de la distribución bidimensional.
- 2° Modelo descriptivo: recta mínimo-cuadrática, varianza residual, coeficiente de determinación.
- 3° Estimación estructural: Estimación puntual, varianza/de las perturbaciones, varianza de los estimadores, estimación por intervalos y coeficientes de dispersión.
- 4° Predicción de valor medio y valor individual: Predicción puntual, varianza de la predicción, intervalos de confianza y coeficiente de dispersión.

Estas cuatro tareas, la última optativa, vamos a compatibilizarlas con la posible transformación previa de los datos, según un esquema semi o doble-logarítmico de forma tal que sea posible ajustar a los datos, bien una relación lineal, una exponencial o una potencial.

Figura 1: Diagrama de Flujo



El conjunto global de tareas a ejecutar y la secuencia que se establece para las mismas, las recogemos en el diagrama de flujo/ que se presenta en la figura 1. Como puede apreciarse en él, la prima operación es la referente a la entrada de datos al micro. A continuación es necesario definir el tipo de ajuste que se quiere realizar y, por consiguiente, la transformación previa de datos que se desea. A pattir de ahí, se ejecutan, sucesivamente, las tareas de cálculos referentes a cálculos previos, modelo descriptivo y estructura estimada, pasándose, a continuación, al proceso de escritura de datos y resultados. Finalmente, tras la conformidad a la tarea de predicción, se imprime la misma, y se permiten reiterativamente nuevas predicciones, si éstas son necesarias. En cualquier caso, antes de finalizar el proceso, es posible reiniciarlo hasta agotar, con los datos introducidos, las transformaciones previas definidas.

III.- ESCRITURA DEL PROGRAMA

A efectos de programación del diseño definido, y como forma de simplificar al máximo la fase de programación, se ha optado por subdividirlo en escalones (sub-rutinas), atendiendo a las tareas básicas que lo conforman. La técnica de la programación estructurada (2), se nos muestra especialmente adecuada en nuestro caso, por permitirnos desmenuzar el problema global en otros más pequeños y específicos que puedan ser analizados y escritos independientemente. La sencillez de programación, la flexibilidad de depuración de errores y la adaptación del programa a otros dialectos Basic, uno de los puntos de mira de esta aplicación didáctica, se ven así muy favorecidos.

-
- (2) Los programas, según su estructura interna, se dice que se presentan en forma lineal o estructurada. La escritura lineal implica una ejecución secuencial de las instrucciones desde la primera a la última, sin saltos y, si los hay, son locales y de poca entidad. Por el contrario, un programa estructurado distribuye la ejecución desde un tronco común o menú, direccionando a grupo de instrucciones para realizar tareas particulares (sub-rutinas, sub-programas o simplemente rutinas) y regresando automáticamente al eje principal de tratamiento.

De acuerdo con la técnica de programación estructurada, necesitamos un menú que distribuya el control a las distintas sub-rutinas, iguales en número al de tareas básicas en que se ha dividido el problema general. Este menú se contiene en las líneas de 5 a 99 del programa (Tabla 1) y en el mismo se ejecutan las siguientes acciones:

Tabla 1.- Líneas de programa 5 - 99. Menú

```

5  REM  MLS
15  GOSUB 100
20  HOME : PRINT "TIPO DE AJUSTE"
25  PRINT : PRINT "(0) LINEAL"
30  PRINT "(1) LOGARITMICO"
35  PRINT "(2) SEMI-LOG"
40  PRINT : INPUT "OPCION ";A
45  ON A GOSUB 55,60
50  GOSUB 200: GOTO 65
55  GOSUB 300: GOTO 65
60  GOSUB 400
65  GOSUB 500
70  GOSUB 600
75  GOSUB 700
80  GOSUB 800
85  HOME : INPUT "PREDICCION (S/N) ";A$
90  IF A$ = "N" THEN GOTO 95
92  GOSUB 900
95  HOME : INPUT "NUEVO AJUSTE (S/N) ";A$
97  IF A$ = "S" THEN GOTO 20
99  END

```

- 1°. Derivar el control a la rutina de entrada de datos (GOSUB 100)
- 2°. Elección de tipo de transformación de los datos y direccionamiento hacia la sub-rutina correspondiente (GOSUB 200, 300 ó 400)
- 3°. Distribución secuencial del control a las rutinas de cálculos previos (GOSUB 500), modelo descriptivo (GOSUB 600) estructura estimada (GOSUB 700) y escritura de datos y resultados (GOSUB 800)
- 4°. Presentación de la opción de predicción y control a la sub-rutina de cálculo y escritura de las medidas definidas para la predicción (GOSUB 900), en su caso.
- 5°. Opción de un nuevo ajuste en base a otras transformaciones de los datos, devolviendo el control a la línea 20 (GOTO 20) o finalizando el proceso.

Una vez escrito el menú, se ha pasado a programar una a una las sub-rutinas que se incluyen en el mismo. Los aspectos fundamentales - que determinan las líneas de instrucciones que las confirman, la pasamos a enumerar a continuación.

En la primera sub-rutina, líneas 100 a 199 (Tabla 2) se recogen el conjunto de instrucciones que deben permitir, en cada aplicación, la entrada manual por teclado de los datos de las variables endógena (Y) y exógena (X). Su configuración concreta, bajo la óptica de garantizar la finalidad de la información que se incorpora, se basa en dos principios: 1º) Petición clara y concisa de los datos y 2º) Flexibilidad de rectificación de los posibles y, por otra parte, habituales errores que este tipo de operaciones manuales engorrosas suele ocasionar. Con esta finalidad, primero se ha programado

Tabla 2.- Líneas de programa 100 - 199. Input :datos

```

100 REM I/DATOS
105 HOME : PRINT "INPUT DATOS"
110 PRINT : INPUT "N=";N
112 DIM U(N),V(N),Y(N),X(N),T(N)
115 INPUT "T(1)=";T(1)
120 T(0) = T(1) - 1
125 HOME : PRINT "DATOS Y(I)"
130 FOR I = 1 TO N
135 T(I) = T(I - 1) + 1
140 PRINT T(I);
145 INPUT "=";U(I)
150 NEXT I
155 PRINT : INPUT "CONFORME DATOS (S/N) ";A$
160 IF A$ = "S" THEN GOTO 175
165 INPUT "COORDENADA,DATO ";I,U(I)
170 GOTO 155
175 HOME : PRINT "DATOS X(I)"
180 FOR I = 1 TO N
185 PRINT T(I);: INPUT "=";V(I)
190 NEXT I
192 PRINT : INPUT "CONFORME DATOS (S/N) ";A$
195 IF A$ = "S" THEN GOTO 199
197 INPUT "COORDENADA,DATO ";I,V(I)
199 RETURN

```

la petición y entrada del tamaño de muestra y la referencia temporal de la misma y, a continuación, la introducción, dato a dato, de las correspondientes a la variable endógena y, posteriormente, de la exógena, permitiéndose en ambas, todas las operaciones de rectificación/que sean necesarias bajo la fórmula de introducir iterativamente - coordenada y nuevo dato válido.

La identificación en pantalla de la variable endógena y exógena, se efectúa en base a sus denominaciones genéricas ya definidas, a saber: $Y(I)$ y $X(I)$ respectivamente. Ahora bien, en esta fase del programa, y para que sea posible el ajuste según distintas transformaciones de los datos, el ordenador las identifica por las letras U y V, reservándose la denominación original para las variables transformadas. Se trata de dos variables instrumentales que permiten conservar en memoria primaria, mientras se ejecuta el programa, los datos originales de las variables.

Tabla 3.- Líneas de programa 200-499. Transformaciones de datos.

```

200 REM LINEAL
210 FOR I = 1 TO N
220 Y(I) = U(I)
230 X(I) = V(I)
240 NEXT I
250 H# = " "
299 RETURN
300 REM LOG
310 FOR I = 1 TO N
320 Y(I) = LOG (U(I))
330 X(I) = LOG (V(I))
340 NEXT I
350 H# = "TRANSF. DOBLE-LOGARITMICA"
399 RETURN
400 REM SEMILOG
410 FOR I = 1 TO N
420 Y(I) = LOG (U(I))
430 X(I) = V(I)
440 NEXT I
450 H# = "TRANSF. SEMI-LOGARITMICA"
499 RETURN

```

La sub-rutinas segunda, tercera y cuarta (Tabla 3) admiten alternativamente, según la opción tomada en el menú, llevar a cabo distintas transformaciones de los datos previos a la ejecución del ajuste mínimo-cuadrático. Las tres rutinas se estructuran idénticamente/ y su programación es una simple transcripción de las operaciones matemáticas respectivas. En las mismas se incluye una variable final (H3) que se iguala al tipo de transformación afectada. Su introducción en este punto del programa nos permitirá, posteriormente, editar los datos bajo la referencia expresada del tipo de transformación a que correspondan.

Las sub-rutinas para cálculos previos, modelo descriptivo y estructura estimada (tabla 4), se escriben línea a línea, siguiendo el/ esquema de cálculos explicitados anteriormente para las mismas. El único problema planteado en ellas, lo ha sido en función de la restricción operativa que impone el micro, en cuanto a la denominación genérica de variables. Estas no pueden sobrepasar dos caracteres significativos (dos letras o una letra y un número) y, en ningún caso, tenemos acceso al alfabeto griego. En este sentido, ha sido necesario remodelar la denominación de coeficientes y medidas comprendidas en el/ esquema teórico.

Un resumen ordenado del conjunto adoptado de equivalencias se recogen en el cuadro III. Como puede apreciarse, se ha realizado un esfuerzo lógico en aproximar, dentro de lo posible, la nueva caracterización a las denominaciones teóricas que le sirvan de base. Así, para las columnas de sumas previas, se han reservado los caracteres: "Y" y "X" para las correspondientes a los datos de cada variable, "Y2" y "X2" para la suma de cuadrados y "YX" como denominación de/ la suma de los productos cruzados de los valores de ambas variables. En cuanto a los momentos, las siglas "YM" y "XM" indican las medias respectivas, "Y1", "X1" y "Y3", los cuadrados de las medias y producto de medias de ambas variables y "A1", "A2" y "A3", así como "M1", "M2" y "M3" los momentos de segundo orden respecto al origen y respecto a las medias de las variables Y, X y momento covariante, respectivamente.

Tabla 4.- Líneas de programa 500-799. Cálculos previos, modelo descriptivo y estructura.

```

500 REM C/PREVIO
505 Y = 0: X = 0: YX = 0: Y2 = 0: X2 = 0
510 FOR I = 1 TO N
520 Y = Y + Y(I)
525 X = X + X(I)
530 YX = YX + Y(I) * X(I)
535 Y2 = Y2 + Y(I) * Y(I)
540 X2 = X2 + X(I) * X(I)
545 NEXT I
550 YM = Y / N
555 XM = X / N
560 Y1 = YM ^ 2
565 X1 = XM ^ 2
570 Y3 = YM * XM
575 A1 = Y2 / N
580 A2 = X2 / N
585 A3 = YX / N
590 M1 = A1 - Y1
592 M2 = A2 - X1
595 M3 = A3 - Y3
599 RETURN
600 REM M/DESCRIP
605 B = M3 / M2
610 A = YM - B * XM
615 R2 = M3 ^ 2 / (M1 * M2)
620 SR = M1 * (1 - R2)
699 RETURN
700 REM ESTRUCTURA
705 SU = N * SR / (N - 2)
710 SB = SU / (N * M2)
715 SA = SB * X2 / N
720 HOME : INPUT "T(N-2)="; T
725 L1 = A + T * SQR (SA)
730 L2 = A - T * SQR (SA)
735 L3 = B + T * SQR (SB)
740 L4 = B - T * SQR (SB)
745 C1 = 100 * (L1 - L2) / (2 * ABS (A))
750 C2 = 100 * (L3 - L4) / (2 * ABS (B))
799 RETURN

```

En el modelo descriptivo, las letras "A" y "B" definen los estimadores de los parámetros y "SR" y "R2" la varianza residual y - coeficiente de determinación. Por último, en la rutina de estructura estimada, la letra "S" se reserva para varianzas, "L" indica límites de intervalos y "C" coeficientes de dispersión. La letra o número que acompaña a cada una de ellas, muestra la referencia concreta de las mismas.

Tabla 5.- Línea de programa 800-899. Edición cálculos.

```

800 REM Q/DATOS
802 PR# 1: SLOT = 1: POKE 1656 + SLOT, 132
805 PRINT CHR$ (14); "M.L.S / (C) J.HERNANDEZ"
807 PRINT : PRINT : PRINT CHR$ (18); "* DATOS : "; H$
810 PRINT : PRINT "T(I)", "Y(I)", "X(I)"
812 FOR I = 1 TO N
815 PRINT T(I), Y(I), X(I)
817 NEXT I
820 PRINT : PRINT : PRINT "# CALCULOS PREVIOS #"
822 PRINT : PRINT "# SUMATORIOS #"; SPC( 10); "# MOMENTOS #"
825 PRINT : PRINT "Y="Y, "YM="YM, "YM2="Y1
827 PRINT : PRINT "X="X, "XM="XM, "XM2="X1
830 PRINT : PRINT " ", " ", "YXM="Y3
832 PRINT : PRINT "Y2="Y2, "A02="A1, "SZY="M1
835 PRINT : PRINT "X2="X2, "A20="A2, "SZX="M2
837 PRINT : PRINT "YX="YX, "A11="A3, "SYX="M3
840 PRINT : PRINT : PRINT "1.MODELO DESCRIPTIVO"
842 PRINT : PRINT "# RECTA MINIMO-CUADRATICA #"
845 PRINT , "^"
847 PRINT , "Y(I)=\"A\" + \"B\" X(I)\"
850 PRINT : PRINT , "SZR="SR, "R2="R2
852 PRINT : PRINT : PRINT "2. ESTRUCTURA ESTIMADA"
855 PRINT : PRINT "# ESTIMACION PUNTUAL #"
857 PRINT , "^", "^"
860 PRINT , "A="A, "B="B
862 PRINT : PRINT , "SZU="SU
865 PRINT : PRINT , "SZA="SA; SPC( 5); "SZB="; SB
870 PRINT : PRINT "# ESTIMACION POR INTERVALOS #"
872 PRINT : PRINT , "I(A):\"L2; SPC( 5); L1
875 PRINT , "I(B):\"L4; SPC( 5); L3
877 PRINT : PRINT , "CDA="C1; SPC( 5); "CDB = \"C2
880 PR# 0
899 RETURN

```

La copia impresa de todos los resultados anteriores, incluidos los datos, se programa en la sub-rutina optava (tabla 5). De las líneas que componen la misma (800 a 899) en la 802, 805, 807 y 880 se contienen sentencias de manejo de la impresora y, en el resto, las correspondientes para una presentación de resultados de la forma más acorde a los cuadros teóricos resumen (cuadros I y II)

En primer lugar, se programa la escritura de datos con referencia, en su caso, al tipo de transformación en la misma (variable H\$). A continuación, los cálculos previos, modelo descriptivo y, por último, estructura estimada. De ella, el diseño más complicado es el relacionado con los cálculos previos, sumas y momentos de la

distribución bidimensional, cuya escritura final, a tres columnas, guarda un estrecho paralelismo con el esquema del cuadro II. La simplicidad de programación que permite el micro para separar la escritura de 16 en 16 columnas, con la inclusión de una simple coma, ha facilitado enormemente esta presentación.

Para no abusar excesivamente de las etiquetas de escritura y poder presentar los resultados según el esquema explicado, ha sido necesario volver a red denominar éstas, acomodando la nueva notación a los conceptos teóricos, sin la restricción de los dos caracteres significativos que limitaban una homogenización clara dentro de programa. Los elementos más característicos (vease cuadro III) lo componen la varianza, intervalos de confianza y coeficiente de dispersión, para los cuales se ha aceptado, como presentación genérica, las siglas "S2", "I" y "CD" indicando el componente agregado a ellas, su referencia correcta.

La última sub-rutina, líneas 900 a 999 de programas (tabla 6) incorpora la predicción y edición de sus resultados. En la primera parte (900 a 955) se ejecutan todos los cálculos y posteriormente, se programa su impresión-escritura. Las instrucciones de manejo de impresora se reducen en este caso a las líneas 960 (conexión) y 998 (desconexión).

Los problemas de notación en cuanto a programas y resultados son idénticos a la comentada anteriormente y remitimos al lector al cuadro III para su análisis.

Tabla 6.- Líneas de programa 900-999. Predicción

```

900  REM  PREDICCION
905  PRINT : INPUT "X(O)=";X(O)
910  Y(O) = A + B * X(O)
915  XO = (X(O) - XM) ^ 2 / (N * M2)
920  SZ = SU * ((1 / N) + XO)
925  SY = SZ + SU
930  L5 = Y(O) + T * SQR (SZ)
935  L6 = Y(O) - T * SQR (SZ)
940  L7 = Y(O) + T * SQR (SY)
945  L8 = Y(O) - T * SQR (SY)
950  C3 = 100 * (L5 - L6) / (2 * ABS (Y(O)))
955  C4 = 100 * (L7 - L8) / (2 * ABS (Y(O)))
960  PR# 1
965  PRINT : PRINT : PRINT "3.PREDICCION"
970  PRINT : PRINT , "X(O)="X(O)
975  PRINT : PRINT "# P. PUNTUAL #"
980  PRINT , "^": PRINT , "Y(O)="Y(O)
985  PRINT : PRINT , "SZY="SZ; SPC( 5); "ECM(Y)="SY
990  PRINT : PRINT "# P. POR INTERVALOS #"
992  PRINT : PRINT , "I(EY)="L6; SPC( 5); L5
995  PRINT , "I( Y)="L8; SPC( 5); L7
997  PRINT : PRINT , "CDE(Y)="C3; SPC( 5); "CD(Y)="C4
998  PR# 0
999  RETURN

```

En conjunto, el menú y las nueve sub-rutinas conforman un programa único que en 162 líneas, conteniendo 216 instrucciones, permitirá efectuar los cálculos típicos de estimación, verificación y predicción en un modelo lineal simple.

Se trata de un programa no excesivamente largo, que ocupa estáticamente una memoria primaria del ordenador de 2.960 bytes (aproximadamente 2,9 Kb). Su dimensión, y por lo tanto la memoria necesaria - para almacenarlo, podrían minorarse por varios caminos, uno de ellos, el más sencillo, la agrupación de varias instrucciones por línea (3):

-
- (3) Un análisis superficial de número de líneas de programa que puede eliminarse, eleva éste a 100, lo cual representa, aproximadamente 400 bytes de memoria. Una disminución superior al 10 %.

Si esta operación no se realiza en este caso es porque se hace prevalecer el criterio de claridad expositiva para facilitar su comprensión y adaptación a otros micros, y también, porque en último extremo, la necesidad de memoria es pequeña en relación a la memoria global de cualquier ordenador personal.

IV. - FUNCIONAMIENTO Y RESULTADOS DEL PROGRAMA

La puesta a punto o depuración, es la última tarea a realizar para la preparación final del programa, y que éste pueda ser utilizado sin que plantee problemas de ejecución. En nuestro caso, por necesidades de presentación del mismo, esta última operación ha sido ya efectuada y el listado que se contiene en el punto anterior se encuentra depurado de errores, tanto de sintaxis, como de ejecución.

Lo que ya a comentar ahora, se puede decir que es el manual de manejo y funcionamiento del mismo, destacándose lo que el operador ve y debe hacer para su correcta ejecución, entendiéndose por ver, tanto los mensajes via pantalla que indican las operaciones manuales a realizar,/ como los resultados impresos que se obtienen en su funcionamiento.

Iniciada su ejecución por medio del comando RUN, como en cualquier programa escrito en lenguaje Basic, aparecerá en la pantalla la petición del tamaño de muestra del problema ($N=$), que debe ir introducido por teclado. A continuación, se nos recuerda también que definamos la referencia temporal de la serie de datos a través del correspondiente al primer elemento ($T(1) =$). Si se trata de una serie cross sección, conyendrá teclear el número uno.

Los valores incorporados al ordenador permiten al mismo pedir, a continuación, uno a uno, los datos de la variable endógena ($Y(1)$), expresando previamente en la pantalla el año a que corresponden. Con la entrada manual del último dato, finaliza el proceso y se nos permitirá dar la conformidad a los mismos. Si esta no se da, se recuerda en pantalla el modo establecido para las rectificaciones individuales, primero, la coordenada (primer dato coordenada uno) y, después, nuevo dato. Esta operación puede repetirse las veces que sean necesarias, pasándose, a -

su término, a la realización de un proceso idéntico para los datos de la variable exógena ($X(1)$).

Validada la información para las dos variables, se nos presentará el menú de posibles ajustes y el carácter que los identifica, a saber: (0) lineal, (1) logarítmico y (2) semi-logarítmico. La elección de uno de ellos genera una serie de cálculos que no necesitan del concurso del operador hasta que el programa alcanza la línea 720, momento en que comienza la ejecución de la estimación por intervalos, efectuándose entonces la petición del valor de la distribución " t " ($T(N-2)$). Dado este, el proceso finaliza con la escritura de los resultados acumulados: datos, cálculos previos, modelo descriptivo y estructura estimada, de acuerdo con la secuencia y presentación que explicitamos posteriormente en los resultados.

La petición de conformidad al estudio de la predicción efectúa ésta, en su caso, con la introducción del valor previsto para $X(X(0)=)$. La última decisión del operador es la relativa a la opción a un nuevo ajuste que generará un reinicio del proceso en la elección del tipo de transformación de los datos o la finalización de la ejecución del programa, que solo podrá volverse a utilizar con la inserción del comando RUN.

El producto final del proceso es una copia impresa de datos y resultados, estructurada en cuanto a forma y contenido como un fiel reflejo del esquema resumen adoptado a nivel teórico para la presentación clara y sintética de resultados. Una muestra concreta de la misma se presenta aquí en el cuadro IV. Para su correcta utilización deben consultarse en el cuadro III las equivalencias entre notación teórica y resultados de programa, dado que el juego de caracteres del ordenador no nos ha permitido respetar en su totalidad los símbolos de la Econometría teórica.

Los valores que se muestran en el cuadro, son el conjunto de resultado de la aplicación efectuada para analizar la validez de los algoritmos de cálculo del programa. En concreto, el material en que se basa este ejercicio se contiene en la publicación: Aplicación a la Economía Española (1.954-70) de un modelo elemental de función de consumo, desarrollado como ejemplo de trabajo para los alumnos de Econometría en

el curso académico 1973/74 por el entonces profesor D. José María de Celis Bares. Los datos de la columna Y(1) corresponden a consumo privado per cápita y X(1) a la renta personal disponible también per cápita y ambas en pesetas constantes.

La fiabilidad de los resultados, una vez comprobada la validez operativa del programa, está fuera de toda duda y cualquier nueva aplicación a otros datos conducirá a unos resultados ciertos. La aparición de errores de cálculo en el proceso automático del ordenador puede decirse que es prácticamente imposible. Los únicos errores que pueden cometerse son los de manipulación, es decir: errores de inserción por teclado de la información que el micro necesita para la realización del programa y que pueden provenir tanto de un simple error de manejo del teclado como de errores de interpretación de los mensajes y preguntas que aparecen durante su ejecución. En previsión de tales errores, nuestro programa guía al usuario en la toma de datos de tal forma que permite detectar y corregir los errores cometidos.

Aún puede surgir un último problema operativo en la ejecución del programa, el relativo al posible desbordamiento de la memoria del micro. Esta se va ocupando progresivamente por el propio programa (modo estático), los datos y la serie de resultados que se van obteniendo (modo dinámico), de forma tal que si la capacidad del micro no alcanza las necesidades de memoria en el funcionamiento del programa, nos aparecerá por pantalla un mensaje de error (out of memory) y su ejecución no podrá efectuarse. Es necesario prever esta eventualidad, en cualquier aplicación posible del programa y conocer los límites exactos de su utilización, según la capacidad de cada ordenador. Como norma general, suele adoptarse la siguiente regla práctica: "cada Kb de programa siempre necesita 256 bytes de memoria adicional para su ejecución".

De acuerdo con dicha regla y, teniendo en cuenta las distintas necesidades de memoria en función de los tamaños de muestra que pueden manejarse en cada aplicación, hemos construido el cuadro V, que pretende ser orientativo de la capacidad mínima del micro para poder ejecutar el programa correctamente.

Cuadro III.- Sintaxis de equivalencia de notación

Teórica	Programa	Resultados	Teórica	Programa	Resultados
$\sum y_i$	Y	Y	$\hat{\sigma}^2$	SU	S2U
$\sum x_i$	X	X	$\hat{\sigma}_{\beta}^2$	SB	S2B
$\sum y_i x_i$	YX	YX	$\hat{\sigma}_{\alpha}^2$	SA	S2A
$\sum y_i^2$	Y2	Y2	I_{β}	L3-L4	I(B)
$\sum x_i^2$	X2	X2	I_{α}	L1-L2	I(A)
$\sum y_i x_i$	YX	YX	Cdp	C2	CDB
\bar{y}	YM	YM	Cda	C1	CDA
\bar{x}	XM	XM			
$\bar{y}\bar{x}$	Y3	YXM	x_0	X(0)	X(0)
\bar{y}^2	Y1	YM2	\hat{y}_0	Y(0)	$\hat{y}(0)$
\bar{x}^2	X1	XM2	$\hat{\sigma}_{y_0}^2$	SZ	S2Y
a_{02}	A1	A02	$\hat{\sigma}_{x_0-y_0}^2$	SY	ECM(Y)
a_{20}	A2	A20	$I_{\alpha+\beta x_0}$	L5-L6	I(EY)
a_{11}	A3	A11	I_{y_0}	L7-L8	I(Y)
S_y^2	M1	S2Y	$Cd_{\alpha+\beta x_0}$	C3	CDE(Y)
S_x^2	M2	S2X	Cd_{y_0}	C4	CD(Y)
S_{yx}	M3	SYX			
$\hat{\alpha}$	A	\hat{A}			
$\hat{\beta}$	B	\hat{B}			
$S_{\hat{u}_i}^2$	SR	S2R			
R^2	R2	R2			

Cuadro IV.- Copia Impresa de Datos y Resultados

M.L.S / (C) J. HERNANDEZ

* DATOS :

T(I)	Y(I)	X(I)
1954	15.466	16.912
1955	16.169	17.494
1956	17.219	18.934
1957	17.616	19.55
1958	18.232	19.806
1959	18.37	19.192
1960	17.38	18.901
1961	19.143	21.061
1962	20.608	22.769
1963	22.7	25.316
1964	23.426	26.273
1965	24.799	27.835
1966	26.364	29.717
1967	27.751	30.28
1968	28.614	31.273
1969	30.289	33.131
1970	31.459	34.86

CALCULOS PREVIOS

SUMATORIOS

MOMENTOS

Y=375.605	YM=22.0944118	YM2=488.163033
X=413.304	XM=24.312	XM2=591.073345
		YXM=537.159339
Y2=8740.61194	A02=514.153644	S2Y=25.9906113
X2=10609.4254	A20=624.083848	S2X=33.0105028
YX=9628.58766	A11=566.38751	BYX=29.2201706

1. MODELO DESCRIPTIVO

RECTA MINIMO-CUADRATICA

$$\hat{Y}(I) = .56807246 + .88542034 X(I)$$

$$S2R = .111394515 \quad R2 = .995714048$$

2. ESTRUCTURA ESTIMADA

ESTIMACION PUNTUAL

$$\hat{A} = .56807246 \quad \hat{B} = .88542034$$

$$S2U = .126247116$$

$$S2A = .140398785 \quad S2B = 2.24967823E-04$$

ESTIMACION POR INTERVALOS

$$I(A) = -.230409529 \quad 1.36655445$$

$$I(B) = .853457626 \quad .917383055$$

$$CDA = 140.559884 \quad CDB = 3.60989159$$

3. PREDICCION

$$X(0) = 35.798$$

P. PUNTUAL

$$\hat{Y}(0) = 32.2643498$$

$$S2Y = .0371059001 \quad ECM(Y) = .163353017$$

P. POR INTERVALOS

$$I(EY) = 31.8538576 \quad 32.674842$$

$$I(Y) = 31.4030645 \quad 33.1256351$$

$$CDE(Y) = 1.27227801 \quad CD(Y) = 2.66946426$$

CUADRO V.- Memoria ocupada según tamaños de muestra.

<u>Tamaño de muestra</u>	<u>Memoria ocupada (bytes)</u>
10	4.112
20	4.425
30	4.739
40	5.051
50	5.364
100	6.926

Según el cuadro, para tamaños de muestra "habituales" en un problema de modelo lineal simple, nos bastará con un micro que disponga de 5 kb de memoria primaria, es decir: que cualquier ordenador personal, por pequeño que sea, puede resolver los cálculos previstos en el modelo sin problemas de desbordamiento de memoria. En el ordenador manejado (48 kb de 35,5 libre para usuario) aún se dispondría de más de 30 kb de memoria libre.

En cualquier caso, las necesidades globales de memoria se pueden reducir, bien de la forma establecida al hablar de la escritura del programa como en la definición de las variables del mismo/ y se puede asegurar que con una optimización normal bastaría, muy posiblemente, con el 50% de los valores del cuadro V para resolver/ satisfactoriamente cualquier modelo lineal simple.

V.- BIBLIOGRAFIA

A) ECONOMETRIA:

ALCAIDE, A	Curso elemental de econometría..	1.982
BARBANCHO, A	Complementos de Econometria!!...	Ariel	1.971
DHRYMES, P	Econometría	AC	1.984
GOLBERGER, A	Teoría Econométrica	Tecnos	1.970
GUJARATI, D	Econometría básica	MC.Graw-hill	1.982
JOHNSTON, J	Metodos de Econometría	Vicens-Vives	1.975
KMENTA, J	Elementos de Econometría	Vicens-Vives	1.977
MALINVAUD, E	Métodos Estadísticos de la Econ.	Ariel	1.967
PINDYCK R/RUBINFELD, D..	Modelos econométricos	Labor	1.980
PULIDO, A	Modelos econométricos	Pirámide	1.983
WONNACOTT R/WONNACOTT T..	Econometría	Aguilar	1.982

B) INFORMATICA:

AGUADO R./Y OTROS ...	Basic Básico	Aguado	1.982
ALCOCK, D	El Basic Ilustrado	Masson	1.984
DE ROSSI, C.	Basic. Curso Acelerado	Paraninfo	1.983
ESCRIVUELA F./SANCHEZ J.	Programación de ordenadores en basic	Alhambra	1.983
GRANADOS D./ERRAZQUIN I.	El basic para todos	Granados	1.982
JOYANES, L.	Programación basic	MC.Graw-hill	1.984
MASCAREÑAS, J.M.	Informatica aplicada a la ges tión financiera	1.984
PARDEE M./WAITE, M...	La programación en basic	Urmo	1.982
POOLE, L.	Apple II.Guía del Usuario ...	MC.Graw-Hill	1.983
POZO, A.	Curso de Informatica. Introduc ción al basic	Alhambra	1.983
LEDING/ LEDIN V	Manual de reglas para el pro gramador	Diana	1.984